Problema 7. Un sistema binario *(problema nr. 1, categoria Senior, Gara Interregionale 2009)*

Un sistema binario non risolto è costituito da una stella di luminosità costante e da una stella variabile. Se venissero osservate singolarmente, la magnitudine apparente della stella di luminosità costante sarebbe pari a $m_c = 4.00$ mentre la magnitudine della stella variabile oscillerebbe tra $m_1 = 5.00$ e $m_2 = 4.00$. Si calcolino le magnitudini apparenti del sistema binario quando la stella variabile è al massimo e quando è al minimo di luminosità.

Parole o espressioni chiave: sistema binario, non risolto, luminosità costante, stella variabile, singolarmente, magnitudine apparente, massimo (di luminosità), minimo (di luminosità)

Dati non necessari: ---

Cenni alla teoria: ***La magnitudine apparente totale di un sistema di oggetti***

In astronomia, lo splendore percepito degli oggetti viene espresso per mezzo del concetto di magnitudine apparente *m*. Si tratta di una grandezza adimensionale (prova cioè di unità di misura), legata al flusso luminoso F dell'oggetto dalla formula di Pogson:

$$m = m_0 - 2.5\log_{10}\left(\frac{F}{F_0}\right)$$

nella quale F_0 è un valore di riferimento del flusso che corrisponde ad un oggetto di magnitudine di riferimento m_0 (usualmente si considera m_0=0).

La magnitudine non è una vera grandezza fisica. Essa esprime solo una caratteristica peculiare della nostra percezione visiva. L'unica grandezza fisica rimane il flusso. Quando si hanno più oggetti luminosi, lo splendore totale si esprime in termini della somma dei flussi, non della somma delle magnitudini.

Il flusso può del resto essere ricavato a partire dalla magnitudine, invertendo la formula di Pogson:

$$F = F_0 \cdot 10^{-0.4\cdot(m-m_0)}$$

Quindi se più sorgenti luminose di magnitudini note, e non distinguibili all'osservazione (ovvero "non risolte"), costituiscono un unico oggetto visibile di splendore maggiore, la magnitudine totale di quest'ultimo si ottiene calcolando dapprima i singoli flussi,

$$F^{(1)} = F_0 \cdot 10^{-0.4\cdot(m_1-m_0)} \quad , \quad F^{(2)} = F_0 \cdot 10^{-0.4\cdot(m_2-m_0)} \quad , \quad \dots \quad , \quad F^{(N)} = F_0 \cdot 10^{-0.4\cdot(m_N-m_0)}$$

quindi sommandoli per ottenere il flusso totale e infine calcolando la magnitudine corrispondente a quest'ultimo:

$$m_{TOT} = m_0 - 2.5\log_{10}\left(\frac{F^{(1)}+F^{(2)}+\dots+F^{(N)}}{F_0}\right)$$

Soluzione

Si deve applicare la Formula di Pogson, secondo cui la magnitudine *m* è legata al flusso *F* dalla relazione

$$m = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F}{F_0}) \qquad da \quad cui \qquad F = F_0 \cdot 10^{-0.4(m-m_0)}$$

essendo m_0 ed F_0 delle grandezze di riferimento (che, come si vedrà, si semplificano nel calcolo). Possiamo dunque calcolare i flussi corrispondenti alle magnitudini fornite dal problema:

$$m_c = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_c}{F_0}) \qquad da \quad cui \qquad F_c = F_0 \cdot 10^{-0.4(m_c-m_0)}$$

$$m_1 = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_1}{F_0}) \qquad da \quad cui \qquad F_1 = F_0 \cdot 10^{-0.4(m_1-m_0)}$$

$$m_2 = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_2}{F_0}) \qquad da \quad cui \qquad F_2 = F_0 \cdot 10^{-0.4(m_2-m_0)}$$

Al minimo di luminosità della stella variabile, il flusso complessivo sarà dato da $F_{MIN} = F_c + F_1$, mentre al massimo esso sarà dato da $F_{MAX} = F_c + F_2$. Le magnitudini corrispondenti saranno ricavabili ancora applicando la legge di Pogson:

$$\begin{aligned}
m_{MIN} &= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_{MIN}}{F_0}) = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_C + F_1}{F_0}) = \\
&= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4(m_c-m_0)} + 10^{-0.4(m_1-m_0)}) = \\
&= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10} 10^{0.4m_0} - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4m_c} + 10^{-0.4m_1}) = \\
&= m_0 - m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4\cdot 4} + 10^{-0.4\cdot 5}) = \\
&= -2.5 \cdot \log_{10}(0{,}02512 + 0.01) = -2.5 \cdot \log_{10}(0{,}03512) = 3.64
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{MAX} &= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_{MAX}}{F_0}) = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_C + F_2}{F_0}) = \\
&= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4(m_c-m_0)} + 10^{-0.4(m_2-m_0)}) = \\
&= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10} 10^{0.4m_0} - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4m_c} + 10^{-0.4m_2}) = \\
&= m_0 - m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4\cdot 4} + 10^{-0.4\cdot 4}) = \\
&= -2.5 \cdot \log_{10}(0{,}02512 + 0.02512) = -2.5 \cdot \log_{10}(0{,}05024) = 3.25
\end{aligned}$$

La magnitudine complessiva del sistema varia dunque tra 3.25 al massimo e 3.64 al minimo.